ности ϑ_p в точке x тогда и только тогда, когда при смещении точки x по поверхности $\vartheta_p : d\vec{OF} \parallel N_{n-p}(x)$, т.е. когда

$$\omega^i + \rho\omega^i_{p+1} = 0.$$

Из равенства (5а), которое справедливо при любом смещении точки x по поверхности ϑ_p, находим $\omega^i_{p+1} = \frac{1}{x^{p+1}}\omega^i$, т.е. F – фокус нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ тогда и только тогда, когда $\omega^i + \rho\frac{1}{x^{p+1}}\omega^i = 0$ при смещении точки x по поверхности ϑ_p.

Из последнего равенства находим $\rho = -x^{p+1}$. Следовательно, точка F – фокус нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{OF} = \vec{Ox} - x^{p+1}\vec{e}_{p+1} = \vec{OO'},$$

т.е. $F \equiv O'$. Итак, доказана

Т е о р е м а 1. Если поверхность ϑ_p лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства, то на прямой $O'x$ существует единственный р-кратный фокус нормальной плоскости к поверхности ϑ_p в точке x – точка O'.

Дифференцируя равенство $\vec{OO'} = x^\sigma\vec{e}_\sigma$ с учетом формул (1) и (5г), получим:

$$d\vec{OO'} = x^\sigma\omega^{p+1}_\sigma\vec{e}_{p+1} + x^\sigma\omega^{\hat{a}}_\sigma\vec{e}_{\hat{a}} - x^{p+1}\omega^\sigma_{p+1}\vec{e}_\sigma. \qquad (6)$$

Откуда следует, что точка O' является фокусом плоскости главной нормали $N_q(x)$ тогда и только тогда, когда при смещении точки x по поверхности $\vartheta_p : \omega^\sigma_{p+1} = 0$ или $\omega^{p+1}_\sigma = 0$. Легко видеть, что если $\omega^{p+1}_\sigma = 0$, то из равенства (5б) следует, что $dx^{p+1} = 0$, т.е. $x^{p+1} = const$, что равносильно условию $\vec{O'x}^2 = const$ или $\vec{OO'} = const$.
Таким образом, доказана

Т е о р е м а 2. Пусть поверхность ϑ_p лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства. Если точка O' – фокус плоскости главной нормали $N_q(x)$, то при смещении точки x по поверхности ϑ_p точка O' смещается по гиперсфере с центром в точке O.

Из равенства (6) следует, что семейство прямых $O'x$ является фокальным (точка O' – фокус) тогда и только тогда, когда при смещении точки x по поверхности $\vartheta_p : d\vec{OO'} \parallel \vec{e}_{p+1}$, т.е. когда имеет место система уравнений

$$x^\sigma\omega^{\hat{a}}_\sigma = 0, \qquad \omega^\sigma_{p+1} = 0. \qquad (7)$$

Так как $\vec{e}_{p+1} \perp \vec{e}_\sigma$, то система (7) равносильна системе

$$x^\sigma\omega^{\hat{a}}_\sigma = 0, \quad \omega^\sigma_{p+1} = 0, \quad \omega^{p+1}_\sigma = 0,$$

которая означает, что $d\vec{OO'} = \vec{0}$, т.е. $O' = const$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. Пусть поверхность ϑ_p лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства. O' – фокус особой нормали $O'x$ тогда и только тогда, когда при смещении точки x по поверхности ϑ_p точка O' неподвижна, т.е. семейство особых нормалей содержится в связке прямых с центром в точке O'.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи р-поверхности евклидова пространства // Сибирский матем. ж. Новосибирск, 1966. Т.7. №3. С.499-511.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сб. / АН Лит.ССР. Вильнюс, 1966. Т.VI. №4. С.475-491.

3. С и л а е в Е.В. О полях особых нормалей поверхности лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n // Геометрия погруженных многообразий: Сб. науч . тр. М., 1985. С.87-92.

УДК 514.75

О ЦЕНТРАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ НА ГИПЕРСФЕРИЧЕСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Г.М.С и л а е в а

(Московский государственный педагогический институт)

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве заданы две гладкие гиперповерхности $V_{n-1}, \overline{V}_{n-1}$ и диффеоморфизм $f : V_{n-1} \to \overline{V}_{n-1}$, при котором $\forall x \in V_{n-1} : y = f(x) \neq x$. Присоединим к каждой точке x поверхности V_{n-1} подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_n\}$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ $(i,j = 1,2,\dots,n-1)$ принадлежали касательному пространству к поверхности V_{n-1} в точке x, а вектор $\vec{e}_n$ являлся ортом вектора $\vec{xy}$. Предполагаем, что вектор $\vec{xy}$ не параллелен ни касательному пространству к поверхности V_{n-1} в точке x, ни касательному пространству к поверхности $\overline{V}_{n-1}$ в соответствующей точке y.

Пусть O – начало абсолютной системы координат. Введем обозначения $\vec{Ox}=\vec{x}$ и т.д. Так как $\vec{xy}=\lambda\vec{e}_n$, где $\lambda=\lambda(x)$ – функция точки $x\in V_{n-1}$, то

$$f(x)=y \iff \vec{y}=\vec{x}+\lambda\vec{e}_n.$$

С помощью отображения f к каждой точке $y=f(x)$ поверхности $\overline{V}_{n-1}$ можно присоединить [1] такой репер $R^y=\{y,\vec{e}\,'_i,\vec{e}_n\}$, что векторы $\vec{e}\,'_i$ принадлежат касательному пространству к поверхности $\overline{V}_{n-1}$ в точке y, причем

$$\vec{e}\,'_i=(\delta_i^j+\lambda t_i^j)\vec{e}_j+B_i\vec{e}_n, \tag{I}$$

где B_i – некоторые функции специального вида.

Деривационные формулы репера R^x имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^n\vec{e}_n,\quad d\vec{e}_n=\omega_n^i\vec{e}_i+\omega_n^n\vec{e}_n.$$

При смещении точки x по поверхности V_{n-1} имеем $\omega^n=0$. Дифференцируя это уравнение внешним образом и применяя лемму Картана, получим $\omega_i^n=b_{ij}^n\omega^j$, где b_{ij}^n симметричны по нижним индексам: $b_{ij}^n=b_{ji}^n$.

Можно показать [1], что формы ω_n^i – главные: $\omega_n^j=t_i^j\omega^i$, где функции t_i^j в каждой точке $x\in V_{n-1}$ образуют геометрический объект типа аффинора, который по аналогии с [2] назовем обобщенным аффинором Вейнгартена.

Напомним, что линия γ на поверхности V_{n-1} называется двойной линией отображения f, если касательные к этой линии и ее образу $f(\gamma)$, взятые в соответствующих точках x и $y=f(x)$, пересекаются или параллельны. Найдем аналитические условия того, что линия γ является двойной линией отображения f. По определению, касательный вектор $\vec{l}=l^i\vec{e}_i$ двойной линии γ: $\omega^i=l^i\theta$, $D\theta=\theta\wedge\theta_1$ отображения f и касательный вектор $\vec{l}\,'=l^i\vec{e}\,'_i$ ее образа $f(\gamma)$ связаны равенством: $\vec{l}\,'=p\vec{l}+q\vec{e}_n$, которое с учетом равенств (I) равносильно равенству

$$(l^i(\delta_i^j+\lambda t_i^j)-p\,l^j)\vec{e}_j+(l^iB_i-q)\vec{e}_n=\vec{0},$$

откуда в силу линейной независимости векторов $\vec{e}_j$ и $\vec{e}_n$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases}(t_i^j-m\delta_i^j)\,l^i=0, & (2а)\\ B_i l^i=q, & (2б)\end{cases}$$

где $m=\frac{p-1}{\lambda}$. Так как l^i одновременно не равны нулю, то определитель системы уравнений (2а) равен нулю: $\det\|t_i^j-m\delta_i^j\|=0$. Заметим, что из равенств (2б) определяется значение q. Следовательно, в указанной системе существенными являются только равенства (2а).

Таким образом, линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда направление этой линии для $\forall x\in\gamma$ удовлетворяет условию:

$$(t_i^j-m\delta_i^j)\,l^i=0, \tag{3}$$

где $\det\|t_i^j-m\delta_i^j\|=0$. Очевидно, что в системе уравнений (3) l^i могут быть произвольными числами тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $t_i^j=m\delta_i^j$. Полученные равенства означают, что справедливо следующее утверждение: любая линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда матрица аффинора Вейнгартена является скалярной матрицей.

Т е о р е м а 1. Любая линия на поверхности V_{n-1} является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда отображение f является центральным проектированием поверхности V_{n-1} на поверхность $\overline{V}_{n-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любая линия на поверхности V_{n-1} является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда равенство (3) выполняется при любых l^i, или, что то же самое, когда $t_i^j\omega^i=m\,\omega^j$, т.е. $\omega_n^j=m\,\omega^j$ (при любых ω^j). Дифференцируя внешним образом последнее равенство, получим, что $dm-m\,\omega_n^n=0$. Рассмотрим точку F: $\vec{F}=\vec{x}-\frac{1}{m}\vec{e}_n$. Заметим, что

$$d\vec{F}=\frac{m\,\omega^i-\omega_n^i}{m}\vec{e}_i-\frac{dm-m\,\omega_n^n}{m^2}\vec{e}_n=\vec{0}$$

при любых ω^i в силу указанных выше равенств. Таким образом, все прямые xy проходят через неподвижную точку F с абсциссой $\varphi=-\frac{1}{m}$, которая является $(n-1)$-кратным фокусом семейства прямых xy, откуда следует, что отображение f является центральным проектированием поверхности V_{n-1} на поверхность $\overline{V}_{n-1}$. Обратно, пусть прямые xy принадлежат связке прямых, тогда вдоль любой линии поверхности V_{n-1} прямые xy образуют коническую поверхность, откуда по теореме Базылева [3] следует, что любая линия на поверхности V_{n-1} является двойной линией f.

Применим полученный результат к частному случаю, когда конгруэнция прямых xy является нормальной конгруэнцией [4] относительно поверхности V_{n-1}. Пусть вектор $\vec{e}_n$ является нормальным вектором поверхности V_{n-1}. Так как $\vec{Fx} \parallel \vec{e}_n$, то $\vec{Fx} = \tau \cdot \vec{e}_n$, где $\tau = \tau(x)$ – функция точки x, или $\vec{x} - \vec{F} = \tau \vec{e}_n$. Дифференцируя полученное равенство, имеем:

$$d\vec{x} = d\tau \cdot \vec{e}_n + \tau \, d\vec{e}_n .$$

Используя деривационные формулы репера R^x, получим:

$$\omega^i \vec{e}_i = d\tau \cdot \vec{e}_n + \tau \, (\omega_n^i \vec{e}_i + \omega_n^n \vec{e}_n),$$

или в силу линейной независимости системы векторов $\vec{e}_i$, $\vec{e}_n$:

$$\omega^i = \tau \omega_n^i,$$

$$d\tau + \tau \omega_n^n = 0. \qquad (4)$$

Так как $\vec{e}_n^{\,2} = 1$, то $\vec{e}_n \cdot d\vec{e}_n = 0$, поэтому в силу деривационных формул репера R^x: $\omega_n^n = 0$. Из равенства (4) следует, что $d\tau = 0$, т.е. $\tau = const$. Таким образом, $\vec{Fx}^2 = \tau^2$, где $\tau = const$, т.е. поверхность V_{n-1} лежит на гиперсфере с центром F и радиусом τ, а отображение f является центральным проектированием части гиперсферы на поверхность $\overline{V}_{n-1}$. Итак, доказана

Т е о р е м а 2. Если любая линия на поверхности V_{n-1} является двойной линией отображения f и конгруэнция прямых xy является нормальной относительно поверхности V_{n-1} (поверхности $\overline{V}_{n-1}$), то поверхность V_{n-1} (поверхность $\overline{V}_{n-1}$) является частью гиперсферы.

С л е д с т в и е. Если конгруэнция прямых xy является нормальной относительно поверхностей V_{n-1} и $\overline{V}_{n-1}$ одновременно, то обе эти поверхности лежат на концентрических гиперсферах с центром в точке F, а отображение f в этом случае является гомотетией с центром в точке F.

Библиографический список

1. С и л а е в а Г.М. О паре гиперповерхностей евклидова n-пространства: Дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1989.

2. К а г а н В.Ф. Основы теории поверхностей. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. Т.I.

3. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.15. С.19-25.

4. Н о р д е н А.П. Теория поверхностей. М.: ГИТТЛ, 1956.

УДК 514.76

МИНИМАЛЬНОЕ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА КОМПАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ

С.Е. С т е п а н о в

(Владимирский педагогический институт)

Согласно основной теореме статьи [1] компактное ориентированное риманово многообразие M не допускает минимальных слоений коразмерности один, если кривизна Риччи многообразия положительна; если же кривизна Риччи неотрицательна и одно такое слоение существует, то все его слои – вполне геодезические подмногообразия M. В настоящей работе данная теорема обобщается на случай минимальных (неинтегрируемых) гиперраспределений.

1. Рассмотрим гиперраспределение Δ на n-мерном римановом многообразии $(M, \langle , \rangle)$ со связностью Леви-Чивита ∇. Обозначим через $\Delta^{\perp}$ ортогональное дополнение Δ. Тензор интегрируемости F и вторая фундаментальная форма Q распределения Δ определяются следующими равенствами [2, с.148]:

$$\begin{cases} \langle F(X,Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z \rangle, \\ \langle Q(X,Y), Z \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z \rangle \end{cases} \qquad (1.1)$$

для любых векторных полей $X, Y \in \Delta$ и $Z \in \Delta^{\perp}$. Гиперраспределение Δ будет интегрируемым, вполне геодезическим или минимальным [2, с.148,150,151], если соответственно $F = 0$, $Q = 0$ или

$$\operatorname{trace} Q = 0 .$$

Пусть ξ – единичное векторное поле, принадлежащее $\Delta^{\perp}$. Определим на M тензорное поле A типа (1,1), полагая

$$AX = -\nabla_X \xi \qquad (1.2)$$

для любого векторного поля X на M. Поскольку для $X, Y \in \Delta$ выполняются равенства $\langle X, \xi \rangle = 0$ и $\langle Y, \xi \rangle = 0$, то в силу (1.2) будем иметь $\langle \nabla_Y X, \xi \rangle = \langle X, AY \rangle$ и $\langle \nabla_X Y, \xi \rangle = \langle Y, AX \rangle$. На основании этого равенства (1.1) можно представить в следующем виде: